Intégrales dépendant d'un paramètre

Plan du chapitre

Dans ce chapitre, on va s'intéresser aux fonctions de la forme $F : x \mapsto \int_I f(x, t)\,dt$ où f est une fonction de deux variables et par exemple apprendre à dériver de telles fonctions. Il ne faut pas confondre avec une autre situation analysée en math sup voire en terminale, les fonctions du type $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ où f est une fonction d'une seule variable (qui est, quand f est continue, une primitive de f).

Un problème se pose : nous allons le moment venu **dériver** la fonction de deux variables $(x, t) \mapsto f(x, t)$ **par rapport à la variable** x, ce qui n'a pas encore été étudié dans le cours de mathématiques (mais le sera dans le chapitre « fonctions de plusieurs variables »). La théorie est délicate mais la pratique ne l'est pas. Dériver par rapport à la variable x la fonction $(x, t) \mapsto f(x, t)$ consiste à fixer la variable t et à dériver la fonction $g : x \mapsto f(x, t)$. Plus précisément, pour obtenir cette dérivée partielle en (x_0, t_0), on fixe t égal à t_0 et on calcule :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, t_0) - f(x_0, t_0)}{x - x_0} = g'(x_0).$$

En refaisant ensuite varier (x_0, t_0), le résultat obtenu contient les variables x et t et définit ainsi une fonction de deux variables appelée dérivée partielle de f par rapport à x et notée $\frac{\partial f}{\partial x}$. Ainsi, pour tout (x, t), on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = g'(x).$$

Par exemple, si pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$, $f(x, t) = t^x e^{-t}$, alors pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = (\ln t) t^x e^{-t}$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = x t^{x-1} e^{-t} - t^x e^{-t} = (x - t) t^{x-1} e^{-t}$.

On prendra garde au fait que dans la notation $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$, la lettre x, utilisée deux fois, ne désigne pas la même chose. Dans ∂x, elle indique la variable par rapport à laquelle on a dérivé et dans (x, t), elle précise en quel point on a évalué. Si on évalue en (x_0, t_0), on obtient $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t_0)$ et non pas $\frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0, t_0)$.

I - Continuité des intégrales à paramètres

Théorème 1. (continuité des intégrales à paramètres)

Soient I et J deux intervalles non vides de $\mathbb{R}$. Soit $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que

- pour chaque x de J, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- pour chaque t de I, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur J ;
- il existe une fonction φ, définie, continue par morceaux et intégrable sur I telle que, pour chaque $(x, t) \in J \times I$, $|f(x, t)| \leqslant \varphi(t)$ (hypothèse de domination).

Alors, la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x, t)\,dt$ est définie et continue sur J.

Démonstration. Soit $x \in J$. La fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I et son module est majoré sur I par la fonction φ qui est continue par morceaux et intégrable sur I. Donc, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I. On en déduit l'existence de $F(x)$.

La fonction F est donc définie sur J. Soit $a \in J$. Montrons que F est continue en a. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de J, convergente, de limite a. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$, posons $g_n(t) = f(x_n, t)$.

- chaque fonction g_n, $n \in \mathbb{N}$, est continue par morceaux sur I ;
- puisque pour chaque $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur J et que $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} a$, on en déduit que pour chaque $t \in I$, la suite numérique $(g_n(t))$ converge vers $f(a, t)$ ou encore la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur I vers la fonction $t \mapsto f(a, t)$. De plus, la fonction $t \mapsto f(a, t)$ est continue par morceaux sur I.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I$, $|g_n(t)| = |f(x_n, t)| \leqslant \varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur I.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $(F(x_n))_{n \in \mathbb{N}} = \left(\int_I g_n(t)\,dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et a pour limite $\int_I f(a, t)\,dt = F(a)$.

On a montré que pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de J, convergente, de limite a, la suite $(F(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (et a pour limite $F(a)$). On sait alors que la fonction F est continue en a.

On a finalement montré que la fonction F est continue sur J.

Exercice 1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}\, dt$.

1) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution 1.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \sin(xt)e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, la fonction $t \mapsto \sin(xt)e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On en déduit l'existence de $F(x)$.

On a montré que F est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$, posons $f(x, t) = \sin(xt)e^{-t^2}$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x, t)\, dt$.

- pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$;
- pour chaque $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- pour chaque $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$, $|f(x, t)| = |\sin(xt)|e^{-t^2} \leqslant e^{-t^2} = \varphi(t)$. De plus, la fonction φ est continue par morceaux puis intégrable sur $[0, +\infty[$ car négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$ d'après un théorème de croissances comparées.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Pour $x \geqslant 1$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{x + \cos t}\, dt$.

1) Vérifier que F est bien définie sur $[1, +\infty[$.

2) Montrer que F est continue sur $[1, +\infty[$.

Solution 2.

1) Soit $x \in [1, +\infty[$. La fonction $t \mapsto \sqrt{x + \cos t}$ est continue sur le segment $[0, \pi]$ (car pour tout réel $t \in [0, \pi]$, $x + \cos t \geqslant 1 + \cos t \geqslant 0$). Donc, la fonction $t \mapsto \sqrt{x + \cos t}$ est intégrable sur $[0, \pi]$. On en déduit l'existence de $F(x)$.

On a montré que F est bien définie sur $[1, +\infty[$.

2) Soit $A > 1$. Pour $(x, t) \in [1, A] \times [0, \pi]$, posons $f(x, t) = \sqrt{x + \cos t}$ de sorte que pour tout $x \in [1, A]$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} f(x, t)\, dt$.

- pour chaque $x \in [1, A]$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, \pi]$;
- pour chaque $t \in [0, \pi]$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[1, A]$;
- pour chaque $(x, t) \in [1, A] \times [0, \pi$, $|f(x, t)| = \sqrt{x + \cos t} \leqslant \sqrt{A + \cos t} = \varphi(t)$. De plus, la fonction φ est continue sur le segment $[0, \pi]$ et donc intégrable sur $[0, \pi]$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction F est continue sur $[1, A]$. Ceci étant étant vrai pour tout $A > 1$, on a montré que F est continue sur $[1, +\infty[$.

Le théorème 1 dit que $\displaystyle\lim_{x\to a} \int_I f(x, t)\, dt = \int_I \lim_{x\to a} f(x, t)\, dt$ quand a est dans le domaine et en cas de continuité en a. Ce théorème se généralise au cas où a est adhérent au domaine, a réel ou infini :

Théorème 2. (passage à la limite sous le signe somme)

Soient I et J deux intervalles non vides de $\mathbb{R}$. Soit $f\ :\ (x,t)\mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $J\times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit a, réel ou infini, adhérent à J. On suppose que

- pour chaque x de J, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- pour chaque t de I, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ a une limite $\ell(t)$ quand x tend vers a et de plus la fonction ℓ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ, définie, continue par morceaux et intégrable sur I telle que, pour chaque $(x,t)\in J\times I$, $|f(x,t)|\leqslant\varphi(t)$ (hypothèse de domination).

Alors, la fonction $F\ :\ x\mapsto\int_I f(x,t)\ dt$ a une limite en a et $\lim\limits_{x\to a}\int_I f(x,t)\ dt=\int_I \ell(t)\ dt=\int_I \lim\limits_{x\to a} f(x,t)\ dt$.

Démonstration.

• Si a est réel, pour $(x,t)\in(J\cup\{a\})\times I$, posons $g(x,t)=\left\{\begin{array}{l}f(x,t)\text{ si }x\in J\\ \ell(t)\text{ si }x=a\end{array}\right.$. La fonction g vérifie les hypothèses du théorème 1 sur $(J\cup\{a\})\times I$ (les inégalités $|f(a,t)|\leqslant\varphi(t)$ étant obtenues par passage à la limite quand x tend vers a). Donc la fonction $G\ :\ x\mapsto\int_I f(x,t)\ dt$ est continue sur $J\cup\{a\}$ et en particulier en a. Ceci montre que $\lim\limits_{x\to a}\int_I f(x,t)\ dt=\int_I g(a,t)\ dt=\int_I \ell(t)\ dt$.

• Si par exemple $a=+\infty$, on applique le résultat précédent à la fonction $(x,t)\mapsto f\left(\dfrac{1}{x},t\right)$ en 0 à droite.

Exercice 3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\ dt$.

Solution 3. Soit $x>0$. La fonction $t\mapsto e^{-x^2t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$. Donc, la fonction $F\ :\ x\mapsto\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\ dt$ est définie sur $]0,+\infty[$.

Pour $(x,t)\in[1,+\infty[\times[0,+\infty[$, posons $f(x,t)=e^{-x^2t^2}$ de sorte que pour tout $x\geqslant 1$, $F(x)=\int_0^{+\infty} f(x,t)\ dt$.

- pour chaque x de $[1,+\infty[$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$;
- pour chaque t de $[0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ a une limite $\ell(t)=0$ quand x tend vers $+\infty$ et de plus la fonction ℓ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$;
- pour tout $x\geqslant 1$, $|f(x,t)|=e^{-x^2t^2}\leqslant e^{-t^2}=\varphi(t)$ où de plus la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.

On en déduit que la fonction $F\ :\ x\mapsto\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\ dt$ a une limite en $+\infty$ et que

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\ dt=\int_0^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2t^2}\ dt=\int_0^{+\infty} 0\ dt=0.$$

II - Dérivation des intégrales à paramètres

Théorème 3. (théorème de dérivation sous le signe somme ou théorème de Leibniz)

Soient I et J deux intervalles non vides de $\mathbb{R}$. Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que

pour chaque x de J, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.

On suppose de plus que f est pourvue sur $J \times I$ d'une dérivée partielle par rapport à sa première variable x vérifiant ;

- pour chaque x de J, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- pour chaque t de I, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I ;
- il existe une fonction φ_1, définie, continue par morceaux et intégrable sur I telle que, pour chaque $(x,t) \in J \times I$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_1(t)$ (hypothèse de domination).

Alors, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,dt$ est de classe C^1 sur J et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme :

$$\forall x \in J,\ F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Démonstration. Puisque pour chaque x de J, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I, la fonction F est définie sur J.

Pour $(x,t) \in J \times I$, posons $g(x,t) = \begin{cases} \dfrac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a} \text{ si } x \neq a \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,t) \text{ si } x = a \end{cases}$ de sorte que pour $x \neq a$,

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = \int_I g(x,t)\,dt.$$

- Pour chaque x dans J, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur I (y compris pour $x = a$).
- Pour chaque t dans I, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur J (y compris en $x = a$ car par définition de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,t)$, $\dfrac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a} \underset{x \to a}{\to} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,t)$).
- Soit $(x,t) \in (J \setminus \{a\}) \times I$. D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$|g(x,t)| = \left|\frac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a}\right| \leqslant \text{Sup}\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(u,t)\right|,\ u \in J\right\} \leqslant \varphi_1(t),$$

ce qui reste vrai quand $x = a$ et $t \in I$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_I g(x,t)\,dt$ est continue sur J et en particulier en a. On en déduit que le taux $\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}$ a une limite quand x tend vers a et donc que F est dérivable en a. De plus,

$$F'(a) = \lim_{x \to a} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \int_I g(x,t)\,dt = \int_I g(a,t)\,dt = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,dt.$$

Ainsi, F est dérivable sur J et et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Enfin, toujours d'apirès le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $F' : x \mapsto \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ est continue sur J et donc F est de classe C^1 sur J.

Exercice 4. (un calcul de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\displaystyle F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$ et $\displaystyle G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$.

1) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser F'.
2) Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser G'.
3) Montrer que la fonction $F+G$ est constante sur $\mathbb{R}$.
4) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
5) En déduire I.

Solution 4.

1) Soit $A>0$. Soit $f : \begin{array}{ccc} [-A,A]\times[0,1] & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \end{array}$.

• Pour chaque x de $[-A,A]$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur le segment $[0,1]$ et est donc intégrable sur ce segment.
• La fonction f admet sur $[-A,A]\times[0,1]$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par :

$$\forall (x,t) \in [-A,A]\times[0,1],\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}.$$

De plus,

- pour chaque $x \in [-A,A]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur le segment $[0,1]$,
- pour chaque $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
- pour chaque $(x,t) \in [-A,A]\times[0,1]$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2A = \varphi(t)$, la fonction φ étant continue et donc intégrable sur le segment $[0,1]$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de Leibniz), la fonction F est de classe C^1 sur $[-A,A]$ et sa dérivée s'obtient en dérivant sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $A>0$, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt.}$$

2) La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de la fonction G et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. En posant $u = xt$, on obtient

$$F'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xt)^2}\,x\,dt = -e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du = -G'(x),$$

cette égalité restant vraie quand $x=0$ par continuité des fonctions F' et G' sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $(F+G)'=0$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle F(x)+G(x) = F(0)+G(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x)+G(x) = \frac{\pi}{4}.}$$

4) Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|F(x)| = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+0^2)}}{1+0^2}\,dt = e^{-x^2},$$

et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$, on a montré que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.}$$

5) Pour $x > 0$, on a $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt \geqslant 0$ et donc d'après la question 3),

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sqrt{G(x)} = \sqrt{\frac{\pi}{4} - F(x)}.$$

La question 4) permet alors d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ et donc que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Exercice 5. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(2tx)\,dt$.

Solution 5. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(2tx)\,dt$.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}\operatorname{ch}(2tx)$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\operatorname{ch}(2tx) = \frac{e^{2tx} + e^{-2tx}}{2} \leqslant e^{2t|x|}$$

et donc

$$\left|t^2 e^{-t^2}\operatorname{ch}(2tx)\right| \leqslant t^2 e^{-t^2+2t|x|} \underset{t\to+\infty}{=} o(1),$$

d'après un théorème de croissances comparées. Ainsi, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}\operatorname{ch}(2tx)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ et est donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$. Finalement, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}\operatorname{ch}(2tx)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On en déduit que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, il est clair que F est paire.

2) Soit $A > 0$. Soit $f : \begin{array}{ccc} [-A, A] \times [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & e^{-t^2}\operatorname{ch}(2tx) \end{array}$ de sorte que pour tout $x \in [-A, A]$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x, t)\,dt$.

- On sait déjà que pour tout $x \in [-A, A]$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$.
- La fonction f admet sur $[-A, A] \times [0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par :

$$\forall (x, t) \in [-A, A] \times [0, +\infty[,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = 2te^{-t^2}\operatorname{sh}(tx).$$

De plus,

- pour chaque x de $[-A, A]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$;
- pour chaque t de $[0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[-A, A]$;
- pour chaque (x, t) de $[-A, A] \times [0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| = 2te^{-t^2}\operatorname{sh}(2t|x|) \leqslant 2te^{-t^2}\operatorname{sh}(2At) = \varphi_1(t)$ où de plus, la fonction φ_1 est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ car négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de Leibniz), la fonction F est de classe C^1 sur $[-A, A]$ et sa dérivée s'obtient en dérivant sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $A > 0$, on a montré que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \int_0^{+\infty} 2te^{-t^2}\operatorname{sh}(2tx)\,dt.$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $A > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto -e^{-t^2}$ et $t \mapsto \text{sh}(2tx)$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_0^A 2te^{-t^2} \text{sh}(2tx)\, dt = \left[-e^{-t^2} \text{sh}(2tx)\right]_0^A + 2x \int_0^A e^{-t^2} \text{ch}(2tx)\, dt = -e^{-A^2} \text{sh}(2Ax) + 2x \int_0^A e^{-t^2} \text{ch}(2tx)\, dt.$$

Quand A tend vers $+\infty$, $-e^{-A^2} \text{sh}(2Ax) = \dfrac{1}{2}\left(e^{-A^2+2AX} - e^{-A^2-2Ax}\right)$ tend vers 0. Quand A tend vers $+\infty$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = 2x \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \text{ch}(2tx)\, dt = 2xF(x).$$

4)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = 2xF(x) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x^2}F'(x) - 2xe^{-x^2}F(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \left(e^{-x^2}F\right)'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x^2}F(x) = e^0 F(0) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \text{ch}(2tx)\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2}.}$$

Si on redérive $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (qui est une fonction de deux variables) par rapport à sa première variable x, on obtient une fonction notée $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et si on recommence, on obtient plus généralement $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ ...

Par récurrence, on en déduit du théorème 3, le théorème plus général suivant :

Théorème 4. (théorème de dérivation sous le signe somme généralisé)

Soient I et J deux intervalles non vides de $\mathbb{R}$. Soit $f\ :\ (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que

pour chaque x de J, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.

On suppose de plus que f est pourvue sur $J \times I$ de dérivées partielles successives par rapport à sa première variable x jusqu'à l'ordre $n \geqslant 1$ (resp. à tout ordre) vérifiant ;

- pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, (resp. $k \in \mathbb{N}^*$) et chaque x de J, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, (resp. $k \in \mathbb{N}^*$) et chaque t de I, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue sur I ;
- pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, (resp. $k \in \mathbb{N}^*$), il existe une fonction φ_k, définie, continue par morceaux et intégrable sur I telle que, pour chaque $(x, t) \in J \times I$, $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)\right| \leqslant \varphi_k(t)$ (hypothèses de domination).

Alors, la fonction $F\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_I f(x, t)\, dt$ est de classe C^n (resp. C^∞) sur J et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation sous le signe somme :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \text{ (resp. } k \in \mathbb{N}^*\text{)},\ \forall x \in J,\ F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)\, dt.$$

Nous mettrons en œuvre ce théorème dans le paragraphe suivant où on étudie la fonction Γ d'Euler.

III - Définition et étude de la fonction Γ

1) Définition.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$. La fonction $f\ :\ t \mapsto t^x e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

Etude en $+\infty$. D'après un théorème de croissances comparées, $t^2 \times t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\rightarrow} 0$ et donc $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que la fonction f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Etude en 0. $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{x-1}$ et donc la fonction f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $x-1>-1$ ce qui équivaut à $x>0$.

Finalement, $\Gamma(x)$ existe si et seulement si $x>0$.

$$\boxed{\forall x>0,\ \Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ dt.}$$

2) Relation fonctionnelle.

Soit $x>0$. Soient a et A deux réels tels que $0<a<A$. Les deux fonctions $t\mapsto t^x$ et $t\mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur le segment $[a,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_a^A t^x e^{-t}\ dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_a^A + x\int_a^A t^{x-1}e^{-t}\ dt = -A^x e^{-A} + a^x e^{-a} + x\int_a^A t^{x-1}e^{-t}\ dt$$

Puisque $x>0$ et donc $x+1>0$, quand a tend vers 0 et A tend vers $+\infty$, on obtient $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

$$\boxed{\forall x>0,\ \Gamma(x+1)=x\Gamma(x).}$$

3) Quelques valeurs.

• En particulier, pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, $\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)$. De plus, $\Gamma(1)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ dt=\left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty}=1$. Par récurrence, on obtient alors

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \Gamma(n)=(n-1)!.}$$

• Calculons aussi $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$. On pose $u=\sqrt{t}$ et donc $t=u^2$ et $dt=2u\ du$ et on obtient

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u^2}}{u}\ 2udu=2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ du=\sqrt{\pi}\ \text{(intégrale de Gauss)}.$$

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.}$$

La relation fonctionnelle du 2) permet encore d'écrire : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\dfrac{1}{2}\right)$ et donc pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{2n-1}{2}\times\frac{2n-3}{2}\times\ldots\times\frac{1}{2}\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)\times(2n-1)\times\ldots\times 3\times 2}{2^n(2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 2}\sqrt{\pi}=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!},$$

ce qui reste vrai quand $n=0$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}.}$$

4) Continuité.

Soient a et A deux réels tels que $0<a<A$. Soit $\Phi\ :\ \begin{array}{ccc}[a,A]\times]0,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R}\\ (x,t) & \mapsto & t^{x-1}e^{-t}\end{array}$ de sorte que pour tout $x\in[a,A]$, $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\Phi(x,t)\ dt$.

• Pour chaque $x\in[a,A]$, la fonction $t\mapsto\Phi(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$,
• pour chaque $t\in]0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto\Phi(x,t)$ est continue sur $[a,A]$,
• Soit $(x,t)\in[a,A]\times]0,+\infty[$. Si $0<t\leqslant 1$, alors $|t^{x-1}e^{-t}|=t^{x-1}e^{-t}\leqslant t^{a-1}e^{-t}$ et si $t\geqslant 1$, $|t^{x-1}e^{-t}|\leqslant t^{A-1}e^{-t}$. On en déduit que

$$\forall (x,t) \in [a,A]\times]0,+\infty[,\ |\Phi(x,t)| \leqslant \left\{\begin{array}{l} t^{a-1}e^{-t} \text{ si } t<1 \\ t^{A-1}e^{-t} \text{ si } t \geqslant 1 \end{array}\right. = \varphi_0(t).$$

D'après le 1), la fonction φ_0 est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction Γ est continue sur $[a,A]$. Ceci étant vrai pour tous réels a et A tels que $0<a<A$, on a montré que

$$\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ est continue sur }]0,+\infty[.}$$

5) Dérivation.

5-a) Dérivée première.

On reprend les notations de 4).

• Pour chaque x de $[a,A]$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.

• La fonction Φ admet sur $[a,A]\times]0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par

$$\forall (x,t) \in [a,A]\times]0,+\infty[,\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = (\ln t)t^{x-1}e^{-t}.$$

De plus,

- pour chaque x de $[a,A]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$,
- pour chaque $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a,A]$,
- pour chaque $(x,t) \in [a,A]\times]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \left\{\begin{array}{l} |\ln t|t^{a-1}e^{-t} \text{ si } t<1 \\ |\ln t|t^{A-1}e^{-t} \text{ si } t \geqslant 1 \end{array}\right. = \varphi_1(t)$.

Vérifions alors l'intégrabilité de la fonction φ_1 sur $]0,+\infty[$. Pour cela, pour $\alpha>0$ donné, vérifions l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto (\ln t)t^{\alpha-1}e^{-t}$ sur $]0,+\infty[$. Cette fonction est

∗ continue par morceaux sur $]0,+\infty[$,

∗ négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$ d'après un théorème de croissances comparées,

∗ négligeable en 0 devant $t^{-1+\frac{\alpha}{2}}$ avec $-1+\dfrac{\alpha}{2} > -1$ car $t^{1-\frac{\alpha}{2}} \times (\ln t)t^{\alpha-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{\alpha/2}(\ln t) \underset{t\to 0}{\to} 0$ d'après un théorème de croissances comparées.

On en déduit que la fonction $t \mapsto (\ln t)t^{\alpha-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et il en est de même de la fonction φ_1.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de Leibniz), la fonction Γ est de classe C^1 sur $[a,A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tous réels a et A tels que $0<a<A$, on a montré que

$$\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x>0,\ \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)t^{x-1}e^{-t}\,dt.}$$

b) Dérivées successives.

• Pour chaque x de $[a,A]$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.

• La fonction Φ admet sur $[a,A]\times]0,+\infty[$ des dérivées partielles à tout ordre par rapport à sa première variable x définies par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x,t) \in [a,A]\times]0,+\infty[,\ \frac{\partial^k \Phi}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}.$$

De plus, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$,

- pour chaque x de $[a,A]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k \Phi}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$,
- pour chaque $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial^k \Phi}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $[a,A]$,
- pour chaque $(x,t) \in [a,A]\times]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial^k \Phi}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \left\{\begin{array}{l} |\ln t|^k t^{a-1}e^{-t} \text{ si } t<1 \\ |\ln t|^k t^{A-1}e^{-t} \text{ si } t \geqslant 1 \end{array}\right. = \varphi_k(t)$.

Enfin, les fonctions φ_k, $k \in \mathbb{N}^*$, sont intégrables sur $]0,+\infty[$ pour les mêmes raisons que la fonction φ_1.

D'après une généralisation du théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction Γ est de classe C^∞ sur $[a,A]$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tous réels a et A tels que $0<a<A$, on a montré que

$$\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0,\ \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}\, dt.}$$

6) Convexité.

D'après 5), la fonction Γ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x > 0$, $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}\, dt > 0$ (intégrable d'une fonction continue positive et non nulle). Donc

$$\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ est strictement convexe sur }]0,+\infty[.}$$

7) Variations.

Puisque la fonction Γ'' est strictement positive sur $]0,+\infty[$, la fonction Γ' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. De plus,
- la fonction Γ est continue sur $[1,2]$,
- la fonction Γ est dérivable sur $]1,2[$,
- $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$,

et le théorème de Rolle permet d'affirmer qu'il existe $x_0 \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(x_0) = 0$. Puisque la fonction Γ' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, la fonction Γ' est strictement négative sur $]0,x_0[$ et strictement positive sur $]x_0,+\infty[$. On a montré que

$$\boxed{\exists x_0 \in]1,2[/ \text{ la fonction } \Gamma \text{ est strictement décroissante sur }]0,x_0] \text{ et strictement croissante sur } [x_0,+\infty[.}$$

8) Etude en $+\infty$.

Puisque la fonction Γ est croissante sur $[2,+\infty[$, pour $x \geqslant 3$, $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \geqslant (x-1)\Gamma(2) = x-1$ et on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$.

De plus, pour $x > 1$, $\dfrac{\Gamma(x)}{x} = \dfrac{x-1}{x}\Gamma(x-1) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$. On en déduit que la courbe représentative de la fonction Γ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = +\infty.}$$

9) Etude en 0.

Pour $x > 0$, $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \underset{x\to0}{\to} \Gamma(1) = 1$ par continuité de la fonction Γ en 1. Donc

$$\boxed{\Gamma(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{x} \text{ et en particulier, } \lim_{x\to0^+} \Gamma(x) = +\infty.}$$

10) Graphe.